

第十章齒輪之測量

齒輪為機械傳遞運動中最重要之元件，它不但可改變運動方向，並且能精密變換轉速，齒輪於圓形、圓錐形或其他特殊外形之外緣上凸起輪齒所構成，嚙合時，令一齒輪之輪齒嵌入另一齒輪之兩輪齒間，來達成所需之運動功能。

齒輪傳動為應用範圍最廣之動力傳動方式，小至鐘錶計時機構，大至數萬馬力之輪船動力傳遞皆有應用。齒輪傳動之特點為：適合兩軸中心較短距離之運動傳遞、能保持精密速度比、傳達動力大等，若潤滑情況正常，使用壽命極高。齒輪之種類繁多，計算複雜，檢驗時，需先了解齒輪之類型、各部名稱、相關檢驗參數等，再依齒輪之精度等級作各種必要之檢驗。

10-1 齒輪之齒形種類

齒輪之齒形種類一般可分為：漸開線（involute）齒形、擺線（cycloid）齒形、餘擺線（trochoid）齒形、複合齒形等，分述如下：

1、漸開線齒輪

1.1 漸開線齒形

漸開線齒形為一般動力傳遞使用最廣之齒形，因為使用量大，一般專用之齒形測量機，多針對此種齒形所設計。漸開線之形成為線繞於圓柱（基圓），線拉緊漸漸打開，線端之軌跡即為漸開線，如圖 10-1，其中， $\widehat{AB} = A_1B$ ， $\widehat{AC} = A_2C$ 。

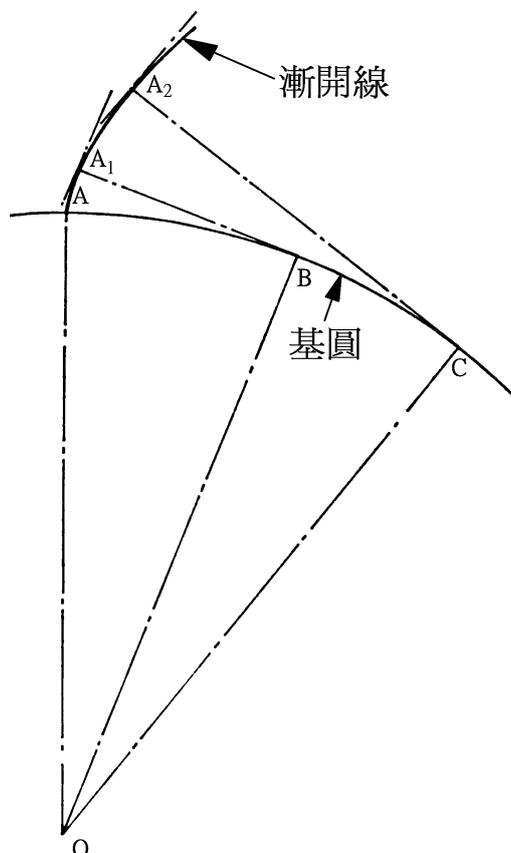


圖 10-1 漸開線之形成

1.2 漸開線函數

如圖 10-2 所示，漸開曲線之起點、基圓中心、基圓切線與漸開線之交點，三者形成之角度 $\angle AOC$ 為 $\angle COB$ 之漸開線函數，由圖中可知， $BC = \sqrt{OC^2 - OB^2}$ ， $\tan \phi = \frac{\sqrt{OC^2 - OB^2}}{OB}$ ， $\widehat{AB} = BC$ ，所以 $\frac{AB}{OB} = \phi + \text{inv } \phi = \frac{BC}{OB} = \tan \phi$ ，得到漸開線函數：

$$\text{inv } \phi = \tan \phi - \phi \quad (10-1)$$

式中之角度單位為徑 (rad)。

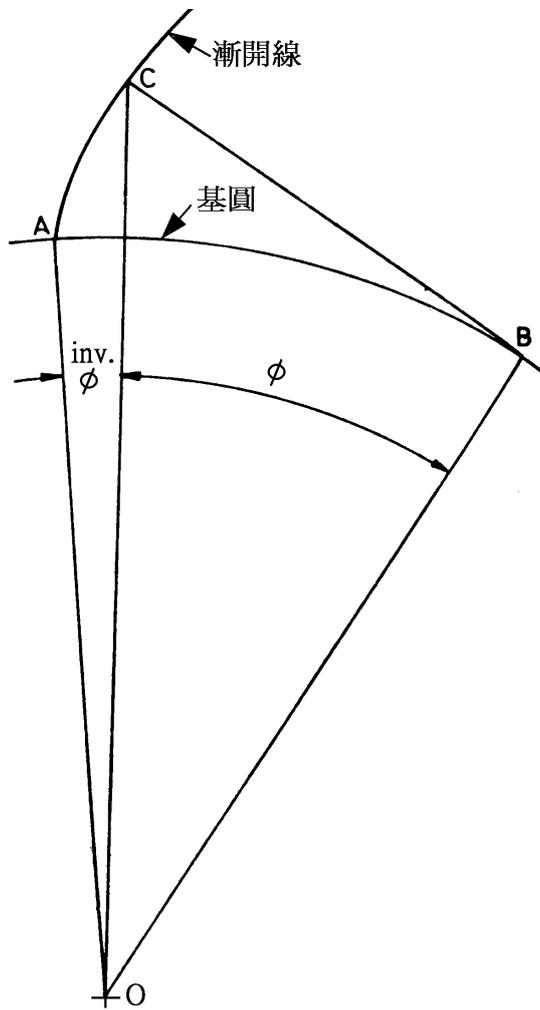


圖 10-2 漸開線函數

2、擺線齒輪

2.1 擺線之形成

擺線為滾圓圓周上的點，因滾圓滾動所形成之軌跡。擺線分為三種(如圖 10-3)：

- (1) 正擺線：滾圓在直線上滾動，滾圓圓周上的點所形成之軌跡，常為擺線齒條之曲線。
- (2) 內擺線：滾圓在基圓內上滾動，滾圓圓周上的點所形成之軌跡，常為擺線齒輪之齒腹曲線。
- (3) 外擺線：滾圓在基圓外上滾動，滾圓圓周上的點所形成之軌跡，常為擺線齒輪之齒面曲線。

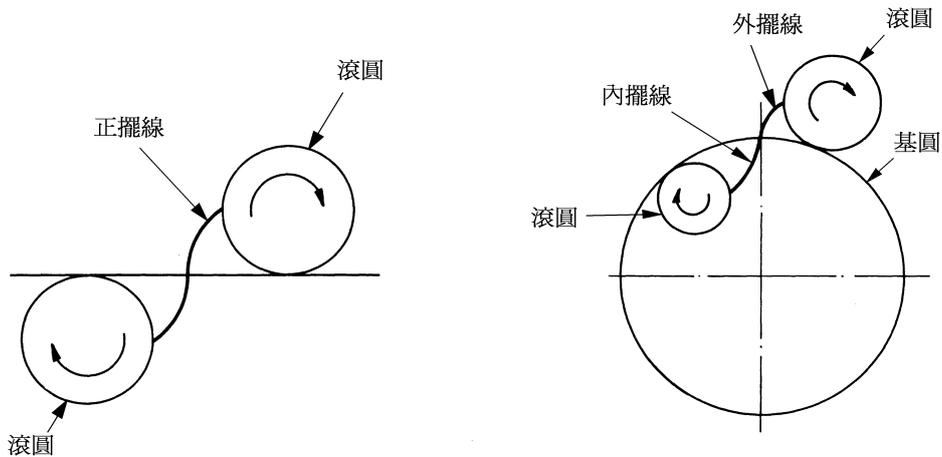


圖 10-3 擺線之形成

2.2 擺線軌跡

(1) 外擺線軌跡

如圖 10-4 所示，若外擺線滾圓半徑為 r_a ，滾動距離為 $\widehat{ac} = \widehat{bc} = R\theta$ ，則 b 點座標 (x, y) 為：

$$\begin{aligned} x &= (R + r_a) \sin \theta - r_a \sin\left(\frac{R + r_a}{r_a} \theta\right) \\ y &= (R + r_a) \cos \theta - r_a \cos\left(\frac{R + r_a}{r_a} \theta\right) \end{aligned} \quad (10-2)$$

(1) 內擺線軌跡

如圖 10-4 所示，若內擺線滾圓半徑為 r_b ，滾動距離為 $\widehat{ac'} = \widehat{bc'} = R\phi$ ，則 b' 點座標 (x', y') 為：

$$\begin{aligned} x &= (R - r_b) \sin \phi - r_b \sin\left(\frac{R + r_b}{r_b} \phi\right) \\ y &= (R - r_b) \cos \phi + r_b \cos\left(\frac{R + r_b}{r_b} \phi\right) \end{aligned} \quad (10-3)$$

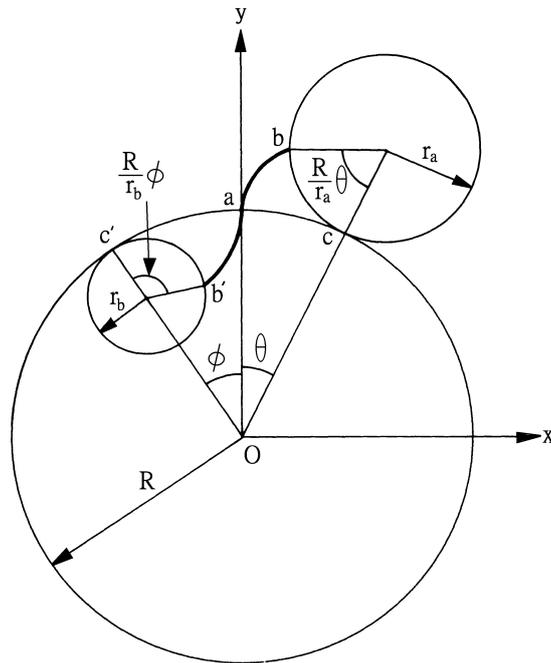


圖 10-4 擺線之軌跡

3、漸開線與擺線齒輪之優缺點

漸開線齒輪與擺線齒輪之優劣點如下：

3.1 漸開線齒輪優點：

- (1) 兩齒輪之中心距，若微有變更或誤差時，不致影響兩輪之嚙合或速比。
- (2) 齒根強度大(因根部較大)。
- (3) 互換性高，只要周節與壓力角相等，即可嚙合。
- (4) 齒形由一種曲線所形成，製造容易。

3.2 漸開線齒輪缺點：

- (1) 壓力角一定，效率較低，傳動時噪音較大。

3.3 擺線齒輪優點：

- (1) 齒形由兩種曲線形成，傳動較確實。
- (2) 較易潤滑，磨損較小。
- (3) 壓力角隨時改變，效率較優。

3.4 擺線齒輪缺點：

- (1) 兩齒輪中心距須絕對正確，是最嚴重缺點。
- (2) 齒形由兩種曲線所形成，故製造困難。
- (3) 互換性較差，須滾圓直徑小於欲嚙合齒輪之半徑。
- (4) 齒之強度差。

4、餘擺線齒輪

餘擺線與擺線類似，唯其軌跡係由距滾圓圓周一一定距離之點所形成，如圖 10-5 所示，滾圓外之點形成之軌跡為長幅餘擺線，滾圓內之點形成之軌跡為短幅餘擺線，餘擺線齒輪用於相對速度極小之軸，使用於油泵浦，可改善一般泵浦之噪音、磨耗、起泡沫等缺點，油泵浦用餘擺線齒輪之形狀如圖 10-6 所示。

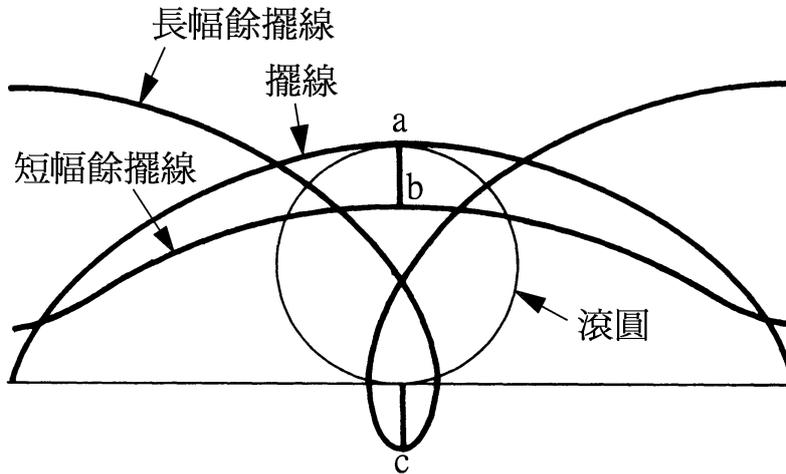


圖 10-5 餘擺線之形成

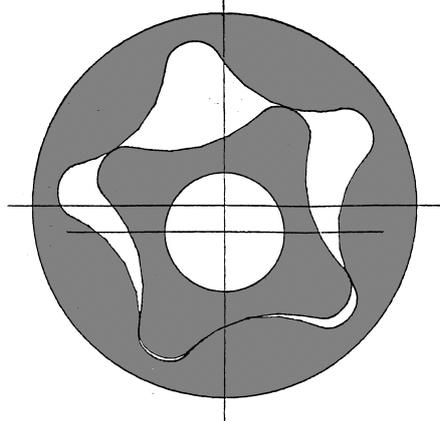


圖 10-6 餘擺線齒輪之外形

5、複合齒形齒輪

複合齒形又稱混合齒形，其為兩種以上齒形構成之齒輪，如美國布朗夏普混合齒，齒形曲線中間部份為漸開線，節線上下為擺線。另有一種將前述混合齒之擺線部份改為圓弧替代之近似齒形。這些齒形可改善齒數少時，漸開線齒形之干涉現象。

10-2 齒輪之測量

齒輪的種類很多，本書僅就正齒輪，並以漸開線齒形為主介紹檢驗之方法，其他齒輪之檢驗可參考其他之齒輪專業書籍，在進入檢驗方法之前，首先需了解齒輪各部名稱、齒輪檢驗參數等，以下一一加以介紹：

1、正齒輪各部名稱（如圖 10-7）：（相關符號與公式請參考表 10-1）

- (1) 節圓(Pitch Circle)：當兩齒輪嚙合傳動時 可以想像兩個圓形摩擦輪以兩齒輪節圓為大小藉著摩擦而傳動,此兩個所想像的摩擦輪接觸所構成之圓即為節圓。
- (2) 節圓直徑(Pitch Diameter)：節圓之直徑。
- (2) 節點(Pitch Point)：兩齒輪節圓相切又與中心連線相交之點。
- (3) 齒面(Tooth Face)：從節圓至齒頂圓間之輪齒曲面。
- (4) 齒腹(Tooth Flank)：一輪齒從節圓至齒根圓間之曲面。
- (5) 齒廓面(Tooth surface)：齒輪之嚙合面，含齒面與齒腹。
- (6) 齒廓(Tooth Profile)：又稱齒形，為齒廓面之斷面曲線。
- (7) 齒間(Tooth space)：節圓上相鄰兩齒之距離。
- (9) 齒頂(Addendum)：自節圓至齒頂圓間在一輪齒上之徑向距離即稱齒頂。
- (10) 齒根(Dedendum)：齒輪節圓與齒根圓之半徑差。
- (11) 弦周節(Chordal Point)：沿節圓，輪齒之一點至相鄰輪齒之同位點之弦線距離。
- (12) 周節(Circular Pitch)：沿節圓，輪齒之一點至相鄰輪齒之同位點之弧線距離。
- (13) 弦齒厚(Chordal Thickness)：輪齒在節圓上之弦線厚度。
- (14) 齒厚：輪齒在節圓上之弧線厚度。
- (15) 弦齒頂(Chordal Addendum)：從一齒在節圓弦線之中心至齒頂圓沿齒之中心線所測量之徑向距離。
- (16) 全齒深(Whole depth)：齒在徑向的全部高度，即齒頂與齒根之和。
- (17) 齒間隙(Clearance)：齒根與齒頂之差，即兩齒輪相嚙合時，甲輪之齒頂與乙齒輪齒根圓之間的空隙。
- (18) 工作深度(Working Depth)：又稱有效齒深，甲乙兩齒輪相嚙合時，甲輪之齒頂與乙輪齒頂之和，即為有效地接觸傳動之深度，故稱工作深度。

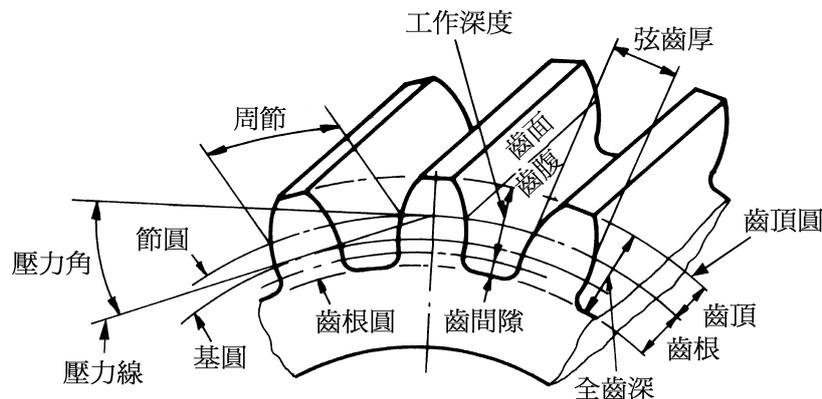


圖 10-7 正齒輪各部名稱

表 10-1 標準正齒輪之計算公式

號碼	項 目	小 齒 輪 (1)	大 齒 輪 (2)
1	齒輪齒形	標 準	
2	模 數	m	
3	壓 力 角	ϕ	
4	齒 數	z_1	z_2
5	有效齒深	$h_e = 2 m$	
6	全 齒 深	$h = 2 m + c$	
7	齒 隙	c	
8	節圓直徑	$d_{o1} = z_1 m$	$d_{o2} = z_2 m$
9	外 徑	$d_{k1} = (z_1 + 2)m$	$d_{k2} = (z_2 + 2)m$
10	齒 底 圓 直 徑	$d_{r1} = (z_1 - 2)m - 2c$	$d_{r2} = (z_2 - 2)m - 2c$
11	基圓直徑	$d_{b1} = z_1 m \cos \phi$	$d_{b2} = z_2 m \cos \phi$
12	周 節	$t_o = \pi m$	
13	法線節距	$t_e = \pi m \cos \phi$	
14	齒 厚	$s_o = \pi m / 2$	
15	弦 齒 厚	$s_{j1} = z_1 m \sin \frac{\pi}{2z_1}$	$s_{j2} = z_2 m \sin \frac{\pi}{2z_2}$
16	齒 頂	$h_{j1} = \frac{z_1 m}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2z_1} \right) + m$	$h_{j2} = \frac{z_2 m}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2z_2} \right) + m$
17	跨 齒 數	$n_1 = \frac{\phi z_1}{180} + 0.5$	$z_{m2} = \frac{\phi z_2}{180} + 0.5$
18	跨 齒 厚	$s_{m1} = z_1 m \cos \phi \left\{ \tan \phi - \phi + \frac{\pi}{2z_1} + \frac{(n_1-1)\pi}{z_1} \right\}$	$s_{m2} = z_2 m \cos \phi \left\{ \tan \phi - \phi + \frac{\pi}{2z_2} + \frac{(n_2-1)\pi}{z_2} \right\}$
19	測銷直徑	$d = 1.728 m$ 或 $1.680 m$	
20	跨 銷 距	$d_{m1} = \frac{z_1 m \cos \phi}{\cos \phi_{d1}} + d \text{ (偶齒數)}$ $d_{m1} = \frac{z_1 m \cos \phi}{\cos \phi_{d1}} \cos \frac{90^\circ}{z_1} + d \text{ (奇數齒)}$ 其中 $inv \phi_{d1} = \frac{d}{z_1 m \cos \phi} - \left(\frac{\pi}{2z_1} - inv \phi \right) + \frac{2X \tan \phi}{z_1}$	$d_{m2} = \frac{z_2 m \cos \phi}{\cos \phi_{d2}} + d \text{ (偶齒數)}$ $d_{m2} = \frac{z_2 m \cos \phi}{\cos \phi_{d2}} \cos \frac{90^\circ}{z_2} + d \text{ (奇數齒)}$ 其中 $inv \phi_{d2} = \frac{d}{z_2 m \cos \phi} - \left(\frac{\pi}{2z_2} - inv \phi \right) + \frac{2X \tan \phi}{z_2}$

- (19) 基圓 (Base Circle)：與壓力線相切之圓，漸開線齒形由此產生。
- (20) 基節 (Base Pitch)：基圓上一齒漸開線起點至相鄰齒同位點之圓弧長。
- (21) 壓力作用線 (Line of Action)：對兩相嚙合漸開線齒輪之基圓作一條公切線，此公切線即是壓力作用線。
- (22) 壓力角 (Pressure Angle)：壓力作用線與量齒和齒輪之節圓公切線之夾角稱壓力角。
- (23) 徑節 (Diametral Pitch)：徑節為英制齒輪之表示法，其定義為在節圓直

徑上每吋齒數，徑節愈小，齒型愈大。

2、齒輪之測量參數

齒輪之檢驗參數主要包含單項誤差與綜合誤差，其中有用於單一齒輪及使用於齒輪對者，其中按對使用性能之影響，可分為下列三大項：

- (1) 有關傳動之準確性：
切向綜合誤差、周節累積誤差、徑向綜合誤差、徑向偏轉、跨齒厚變動等。
- (2) 有關傳動之平穩性：
切向一齒綜合誤差、徑向一齒綜合誤差、齒形誤差、周節誤差、基節誤差、螺旋角誤差等。
- (3) 有關齒輪負載均勻性：
接觸線誤差、齒向誤差、軸向齒距之法向誤差等。

2.1 常用各國齒輪精度標準

各國齒輪精度標準不盡相同，我國公制以模數為使用系統，常用 JIS 規格，其齒輪精度由 0 級精度最高，至 8 級精度最低。

表 10-2 常用各國齒輪精度標準

齒輪精度標準	使用系統	等級區分（精...粗）
JIS B 1742	模數	0, 1, 2, ..., 8
JGMA-116-01	模數	0, 1, 2, ..., 8
DIN 3962, 3963	模數	1, 2, 3, ..., 12
ISO 1328	模數	1, 2, 3, ..., 12
AGMA 390.03	徑節	16, 15, 14, ..., 3

註：JIS（日本工業規格）、JGMA（日本齒輪製造協會）、DIN（德國工業規格）、ISO（國際標準組織）、AGMA（美國齒輪製造協會）

3、齒厚之測量

齒厚測量為齒輪最簡便且常用之檢驗方式，其測方法可分為弦齒厚測量法、跨齒厚測量法、跨銷測量法及齒輪測量機等，分述如下：

3.1 弦齒厚測量法

弦齒厚測量法大多使用齒厚游標卡尺，如圖 10-8 所示，量測前先將齒高依理論值固定，在量取弦齒厚值與理論值比較。此法易受齒頂圓直徑精度與測爪接觸情況影響，故量測精度不高，僅適用於大節距之大齒輪。

如圖 10-8 所示，弦齒厚 $S_j = ab = 2bc$

$$\theta = \frac{360^\circ}{4z} \text{，其中 } z \text{ 為齒數，} \sin \theta = \frac{cd}{ob} \text{，} ob = r = \frac{D}{2} = \frac{zm}{2}$$

$$cd = ob \sin \theta = \frac{zm}{2} \sin \frac{360^\circ}{4z}$$

$$S_j = ab = 2cd = zm \sin \frac{360^\circ}{4z} = zm \sin \frac{90^\circ}{z} \quad (10-4)$$

其中， z 為齒數， m 為模數

弦線齒高 (chordal addendum) h_j 之計算：

$$od = r = \frac{D}{2} = \frac{zm}{2}$$

$$oc = ob \cos \theta = \frac{zm}{2} \cos \frac{360^\circ}{4z} = \frac{zm}{2} \cos \frac{90^\circ}{z}$$

$$dc = od - oc = \frac{zm}{2} \left(1 - \cos \frac{90^\circ}{z}\right)$$

$$h_j = h_k + cd = h_k + \frac{zm}{2} \left(1 - \cos \frac{90^\circ}{z}\right) \quad (10-5)$$

爲了使用上方便，將 (10-4)、(10-5) 式，可以模數 $m = 1$ 建立速查表，如表 10-3，使用時，若模數不等於 1，只要將模數乘上表中數值即可。

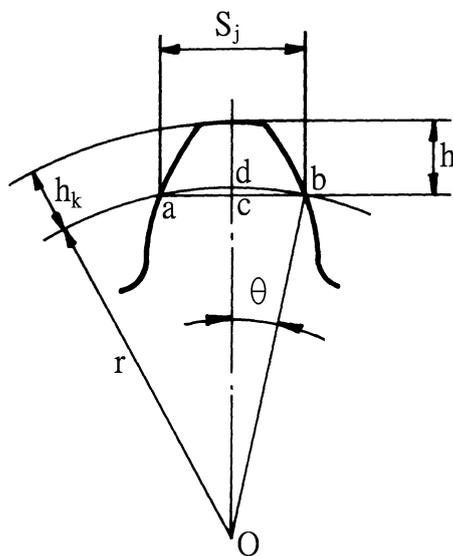
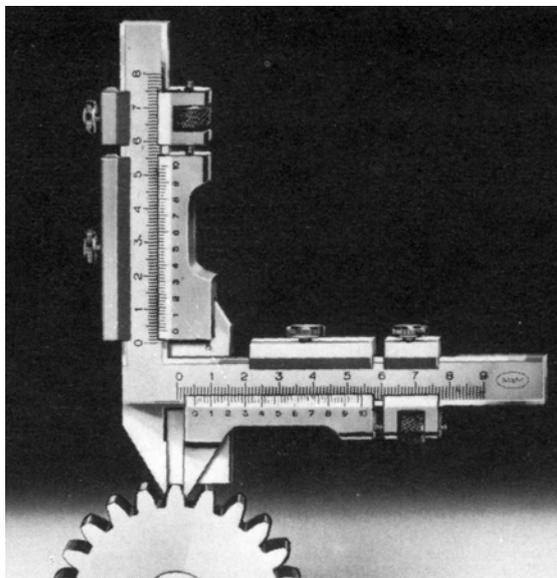


圖 10-8 弦齒厚測量法 [5]

表 10-3 弦齒厚、弦線齒高速查表

單位：mm

z	s_j	h_j	z	s_j	h_j	z	s_j	h_j
			50	1.5705	1.0123	95	1.5707	1.0065
6	1.5529	1.1022	51	1.5706	1.0121	96	1.5707	1.0064
7	1.5568	1.0873	52	1.5706	1.0119	97	1.5707	1.0064
8	1.5607	1.0769	53	1.5706	1.0117	98	1.5707	1.0063
9	1.5628	1.0684	54	1.5706	1.0114	99	1.5707	1.0062
10	1.5643	0.0616	55	1.5706	1.0112	100	1.5707	1.0061
11	1.5654	1.0559	56	1.5706	1.0110	101	1.5707	1.0061
12	1.5663	1.0514	57	1.5706	1.0108	102	1.5707	1.0060
13	1.5670	1.0474	58	1.5706	0.0106	103	1.5707	1.0060
14	1.5675	1.0440	59	1.5706	0.0105	104	1.5707	1.0059
15	1.5678	1.0411	60	1.5706	1.0102	105	1.5707	1.0059
16	1.5683	1.0385	61	1.5706	1.0101	106	1.5707	1.0058
17	1.5686	1.0362	62	1.5706	1.0100	107	1.5707	1.0058
18	1.5688	1.0342	63	1.5706	1.0098	108	1.5707	1.0057
19	1.5690	1.0324	64	1.5706	1.0097	109	1.5707	1.0057
20	1.5692	1.0308	65	1.5706	1.0095	110	1.5707	1.0056
21	1.5694	1.0294	66	1.5706	1.0094	111	1.5707	1.0056
22	1.5695	1.0281	67	1.5706	1.0092	112	1.5707	1.0055
23	1.5696	1.0268	68	1.5706	1.0090	113	1.5707	1.0055
24	1.5697	1.0257	69	1.5707	1.0088	114	1.5707	1.0054
25	1.5698	1.0247	70	1.5707	1.0087	115	1.5707	1.0054
26	1.5698	1.0237	71	1.5707	1.0086	116	1.5707	1.0053
27	1.5699	1.0228	72	1.5707	1.0085	117	1.5707	1.0053
28	1.5700	1.0220	73	1.5707	1.0084	118	1.5707	1.0052
29	1.5700	1.0213	74	1.5707	1.0083	119	1.5707	1.0052
30	1.5701	1.0208	75	1.5707	1.0081	120	1.5707	1.0052
31	1.5701	1.0199	76	1.5707	1.0080	121	1.5707	1.0051
32	1.5702	1.0193	77	1.5707	1.0079	122	1.5707	1.0051
33	1.5702	1.0187	78	1.5707	1.0079	123	1.5707	1.0050
34	1.5702	1.0181	79	1.5707	1.0077	124	1.5707	1.0050
35	1.5702	1.0176	80	1.5707	1.0076	125	1.5707	1.0049
36	1.5703	1.0171	81	1.5707	1.0075	126	1.5707	1.0049
37	1.5703	1.0167	82	1.5707	1.0074	127	1.5707	1.0049
38	1.5703	1.0162	83	1.5707	1.0074	128	1.5707	1.0048
39	1.5704	1.0158	84	1.5707	1.0073	129	1.5707	1.0048
40	1.5704	1.0154	85	1.5707	1.0072	130	1.5707	1.0047
41	1.5704	1.0150	86	1.5707	1.0071	135	1.5708	1.0046
42	1.5704	1.0147	87	1.5707	1.0070			
43	1.5705	1.0143	88	1.5707	1.0069			
44	1.5705	1.0140	89	1.5707	1.0068	150	1.5708	1.0045
45	1.5705	1.0137	90	1.5707	1.0068	250	1.5708	1.0025
46	1.5705	1.0134	91	1.5707	1.0067	∞	1.5708	1.0000
47	1.5705	1.0131	92	1.5707	1.0067			
48	1.5705	1.0129	93	1.5707	1.0067			
49	1.5705	1.0126	94	1.5707	1.0066			